De formule van Cardano bij derdegraadsvergelijkingen ir. H. Karsmakers

Afleiding van de formule

De Italiaanse arts en wiskundige Girolamo Cardano (1501-1576) was de eerste die de algemene oplossing van een derdegraadsvergelijking publiceerde. De formule waarmee zo'n vergelijking kan worden opgelost staat in de wiskunde bekend als de formule van Cardano.

Aan de ontdekking van de oplossing van de vergelijking van graad drie zijn ook de namen Niccolò Tartaglia (1499-1557) en Scipione del Ferro (1465-1526) verbonden. Het is een ingewikkelde geschiedenis wie nu de eigenlijke bedenker van de methode is.
Later introduceerde Rafael Bombelli (1526-1572) complexe getallen, om bepaalde gevallen van de vergelijking te kunnen oplossen.

De algemene vergelijking van de derde graad luidt: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, waarbij de factoren a, b en c gegeven getallen zijn en de waarde van x dient te worden opgelost. Een eventuele vermenigvuldigingsfactor van x^3 kan eerst door deling worden geëlimineerd.

De vergelijking is in een eenvoudiger vorm te brengen door de term met x^2 te elimineren. Stel namelijk $x = y + k$, dan geldt:

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3ky^2 + 3k^2y + k^3 \\ ax^2 &= ay^2 + 2aky + ak^2 \\ bx &= by + bk \end{aligned}$$

zodat: $$f(x) = y^3 + (3k + a)y^2 + (3k^2 + 2ak + b)y + k^3 + ak^2 + bk + c = 0 \qquad (1)$$
waarbij $$x = y + k \qquad (2)$$

De term met y^2 in (1) is nu te elimineren door de factor k zo te kiezen, dat $k = -\frac{1}{3}a$.
De factor k kan worden uitgewerkt in (1):

$$3k^2 + 2ak + b = \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 + b = -\frac{1}{3}a^2 + b$$

stel: $$p = -\frac{1}{3}a^2 + b \qquad (3)$$

$$k^3 + ak^2 + bk + c = -\frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

stel: $$q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \qquad (4)$$

Substitutie van de uitdrukkingen (3) en (4) in vergelijking (1) levert nu:

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (5)$$

Zodra y hieruit is berekend, wordt de oplossing x gevonden via $x = y - \frac{1}{3}a$. (6)

Vervolgens worden de parameters u en v ingevoerd, waarbij $y = u + v$. (7)

Dit is noodzakelijk om de derdegraads vergelijking te kunnen transformeren in een vierkantsvergelijking, zoals nu zal worden aangetoond. De vergelijkingen (5) en (7) kunnen namelijk als volgt worden geschreven:

$$y^3 = -py - q$$
$$y^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3 = 3uvy + u^3 + v^3 \qquad (8)$$

Door vergelijking van variabelen bij de twee vergelijkingen (8) is in te zien dat:

$$3uv = -p \quad \rightarrow \quad 27u^3v^3 = -p^3 \quad \rightarrow \quad u^3v^3 = -\frac{1}{27}p^3 \qquad (9)$$
$$u^3 + v^3 = -q \qquad (10)$$

Op de bovenstaande wijze zijn nu de twee vergelijkingen (9) en (10) ontstaan met de parameters u^3 en v^3, zodat beide parameters door eliminatie van de andere parameter kunnen worden uitgedrukt in p en q via een kwadratische vergelijking.

Eliminatie van v^3 in (9) door substitutie via (10) geeft dan:

$$u^3(-q-u^3) = -\frac{1}{27}p^3 \quad \rightarrow \quad (u^3)^2 + qu^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$$

Oplossen met de abc-formule: $$u^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3} \qquad (11)$$

Analoog geeft eliminatie van u^3:

$$v^3(-q-v^3) = -\frac{1}{27}p^3 \quad \rightarrow \quad (v^3)^2 + qv^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$$

Oplossen met de abc-formule: $$v^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3} \qquad (12)$$

Het blijkt, dat u en v uitwisselbaar zijn, zonder dat de formules wezenlijk veranderen. Om te voldoen aan (10) dienen de wortelfactoren in u^3 en v^3 tegen elkaar weg te vallen. Daarom is in de uitdrukkingen (11) en (12) op arbitraire wijze het plusteken vóór het wortelteken aan u^3 en het minteken aan v^3 toegekend. De parameters u en v zijn nu te berekenen door het trekken van de derdemachtswortel in deze uitdrukkingen:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}} \qquad \text{en} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}} \qquad (13)$$

Door combinatie van (13) met (6) en (7) wordt dan de bekende formule van Cardano verkregen, waarbij p en q zijn gegeven door (3) en (4):

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}} - \frac{1}{3}a \qquad (14)$$

met: $p = -\frac{1}{3}a^2 + b$ en $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$

De drie oplossingen van de vergelijking

Formule (14) geeft slecht één oplossing voor x , terwijl een derdegraadsvergelijking drie mogelijke oplossingen (wortels) heeft. Het trekken van de derde-machtswortel van u^3 resp. v^3 in (13) heeft immers slechts één oplossing (14) opgeleverd.

De andere twee oplossingen zijn als volgt te verkrijgen, waarbij wordt uitgegaan van de reeds gevonden (eerste) oplossing van u resp. v in (13), die in het vervolg u_1 resp. v_1 zullen worden genoemd:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}} \qquad \text{en} \qquad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}} \tag{15}$$

Omdat u_1 een wortel is van vergelijking (11) geldt namelijk:

$$u^3 - u_1^3 = 0 = (u - u_1)(u^2 + uu_1 + u_1^2) \tag{16}$$

De andere wortels u_2 en u_3 zijn uit te drukken in de reeds bekende wortel u_1 door de onbekende u op te lossen in het rechterlid van (16): $\quad u^2 + uu_1 + u_1^2 = 0$ (17)

De oplossingen van (17) zijn dan: $\quad u_{2,3} = -\frac{1}{2}u_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 - 4u_1^2} = -\frac{1}{2}u_1(1 \pm i\sqrt{3})$ (18)

Op analoge wijze voor v_2 en v_3: $\quad v_{2,3} = -\frac{1}{2}v_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{v_1^2 - 4v_1^2} = -\frac{1}{2}v_1(1 \pm i\sqrt{3})$ (19)

Hierbij staat de door Leonhard Euler (1707-1783) geïntroduceerde imaginaire eenheid i voor $\sqrt{-1}$ (of $i^2 = -1$) en wordt het plusteken vóór i op arbitraire wijze aan u_2 resp. v_2 en het minteken aan u_3 resp. v_3 toegekend. De factor $1 \pm i\sqrt{3}$ is een complex getal.

Op bovenstaande wijze zijn drie oplossingen voor u en drie voor v verkregen. De vraag is nu, welke paren (u_i, v_j) er volgens (9) en (10) voldoen aan $3uv = -p$ en $u^3 + v^3 = -q$.

Het is eenvoudig in te zien dat (u_1, v_1) aan (10) voldoet, want bij sommeren van u_1^3 en v_1^3 vallen de worteltermen van de uitdrukkingen (11) en (12) tegen elkaar weg.
Bovendien geldt ook $3u_1v_1 = -p$, immers:

$$\begin{aligned} 3u_1v_1 &= 3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - (\frac{1}{2}q)^2 - (\frac{1}{3}p)^3} = 3(-\frac{1}{3}p) = -p \end{aligned}$$

Een ander paar dat voldoet is (u_2, v_3) omdat:

$$3u_2v_3 = 3 \cdot -\frac{1}{2}u_1(1 + i\sqrt{3}) \cdot -\frac{1}{2}v_1(1 - i\sqrt{3}) = \frac{3}{4}u_1v_1(1 + 3) = 3u_1v_1 = -p$$

en

$$u_2^3 + v_3^3 = \left(-\frac{1}{2}u_1(1 + i\sqrt{3})\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}v_1(1 - i\sqrt{3})\right)^3 = -\frac{1}{8}u_1^3(-8) - \frac{1}{8}v_1^3(-8) = u_1^3 + v_1^3 = -q$$

Ook het paar (u_3,v_2) voldoet aan (9) en (10), zoals eenvoudig valt te controleren.

De overige paren (u_1,v_2), (u_1,v_3), (u_2,v_1), (u_2,v_2), (u_3,v_1) en (u_3,v_3) voldoen wel aan (10), maar blijken niet te voldoen aan (9), omdat de producten $3u_iv_j$ tot resultaten leiden, waarin factoren $1+i\sqrt{3}$ of $1-i\sqrt{3}$ voorkomen.

De combinaties (u_1,v_1), (u_2,v_3) en (u_3,v_2) leiden tot de drie volgende waarden van y:

$$y_1 = u_1 + v_1 \tag{20}$$

$$y_2 = u_2 + v_3 = -\frac{1}{2}u_1(1+i\sqrt{3}) - \frac{1}{2}v_1(1-i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1 + i\sqrt{3}(u_1 - v_1)) \tag{21}$$

$$y_3 = u_3 + v_2 = -\frac{1}{2}u_1(1-i\sqrt{3}) - \frac{1}{2}v_1(1+i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1 - i\sqrt{3}(u_1 - v_1)) \tag{22}$$

De drie oplossingen voor x zijn dan, door toepassing van (6):

$$x_1 = u_1 + v_1 - \frac{1}{3}a \tag{23}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1 + i\sqrt{3}(u_1 - v_1)) - \frac{1}{3}a \tag{24}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1 - i\sqrt{3}(u_1 - v_1)) - \frac{1}{3}a \tag{25}$$

Toepassing van de formules

Bij nadere beschouwing van de vorm van de drie oplossingen (23), (24) en (25) van de derdegraadsvergelijking zou kunnen worden gedacht, dat de oplossing x_1 reëel en de oplossingen x_2 en x_3 complex zijn. Dit hoeft echter geenszins het geval te zijn.

In de formule van Cardano komt namelijk de factor $\sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}$ voor, waarbij de term $(\frac{1}{2}q)^2$ weliswaar positief (of nul) is, maar de term $(\frac{1}{3}p)^3$ negatief kan zijn indien $p < 0$.
In zo'n geval is het mogelijk, dat de factor onder het wortelteken een negatief getal is, zodat de formules (13) en (15) complexe getallen opleveren voor de parameters u_1 en v_1.
Er is dan sprake van een zogenaamde casus irreducibilis.

Dit maakt het zinvol een discriminant $D = (\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3$ te definiëren. (26)

Op grond van deze discriminant kunnen de volgende drie gevallen worden onderscheiden:

- $D > 0$
  De waarden u_1 en v_1 zijn reëel, dus ook de oplossing x_1. Deze kan worden berekend met de formule van Cardano (14) of via de formules (15) en (23).
  De beide oplossingen x_2 en x_3 zijn dan complexe getallen, die te berekenen zijn via de formules (15), (24) en (25).

- $D = 0$

$u_1 = v_1 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, zodat voor de reële oplossing x_1 geldt: $x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q} - \frac{1}{3}a$ (27)

De oplossingen x_2 en x_3 zijn identiek en eveneens reëel: $x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} - \frac{1}{3}a$ (28)

Hierbij is q volgens (4) gegeven door: $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$

- $D < 0$ (casus irreducibilis)

De waarden van $u_1^{\;3}$ en $v_1^{\;3}$ zijn in dit geval geen reële, maar complexe getallen ($p < 0$).
Volgens (11), (12) en (26) geldt dan:

$$u_1^{\;3} = -\frac{1}{2}q + i\sqrt{-D} \qquad \text{en} \qquad v_1^{\;3} = -\frac{1}{2}q - i\sqrt{-D} \tag{29}$$

Om de waarden van u_1 en v_1 te berekenen zijn poolcoördinaten noodzakelijk.
Stel daarom:

$$u_1^{\;3} = -\frac{1}{2}q + i\sqrt{-D} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{30}$$

$$v_1^{\;3} = -\frac{1}{2}q - i\sqrt{-D} = r\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) \tag{31}$$

Abraham de Moivre (1667–1754) heeft een stelling geïntroduceerd, die het mogelijk maakt om de derdemachtswortel te trekken uit complexe getallen:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

Daaruit volgt de oplossing (de zogenaamde hoofdwaarde) voor u_1 en v_1 , waarbij $\sigma = \sqrt[3]{r}$ (de twee andere oplossingen worden buiten beschouwing gelaten):

$$u_1 = \sqrt[3]{u_1^{\;3}} = \sqrt[3]{r}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{3}} = \sigma\,(\cos\frac{1}{3}\varphi + i\sin\frac{1}{3}\varphi) \tag{32}$$

$$v_1 = \sqrt[3]{v_1^{\;3}} = \sqrt[3]{r}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{1}{3}} = \sigma\,(\cos\frac{1}{3}\varphi - i\sin\frac{1}{3}\varphi) \tag{33}$$

De waarde van σ kan door vermenigvuldiging van $u_1^{\;3}$ en $v_1^{\;3}$ in (29) worden verkregen, in overeenstemming met (9), (30) en (31):

$$u_1^{\;3}v_1^{\;3} = (-\frac{1}{2}q + i\sqrt{-D})(-\frac{1}{2}q - i\sqrt{-D}) = \frac{1}{4}q^2 - D = \frac{1}{4}q^2 - (\frac{1}{2}q)^2 - (\frac{1}{3}p)^3 = -(\frac{1}{3}p)^3$$

$$u_1^{\;3}v_1^{\;3} = r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$$

$$\text{zodat } r^2 = -(\frac{1}{3}p)^3 \quad \rightarrow \quad \sigma = \sqrt[3]{r} = \sqrt[6]{r^2} = \sqrt{-\frac{1}{3}p} \tag{34}$$

De waarde van φ is via (30), (31), (10) en (34) als volgt te berekenen:

$$u_1^{\;3} + v_1^{\;3} = 2r\cos\varphi \quad \rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{u_1^{\;3} + v_1^{\;3}}{2r} = \frac{-q}{2r} = \frac{-q}{2\sigma^3} \tag{35}$$

Via (32) en (33) worden nu eerst de factoren $u_1 + v_1$ en $u_1 - v_1$ bepaald:

$$u_1 + v_1 = \sigma(\cos\frac{1}{3}\varphi + i\sin\frac{1}{3}\varphi) + \sigma(\cos\frac{1}{3}\varphi - i\sin\frac{1}{3}\varphi) = 2\sigma\cos\frac{1}{3}\varphi \qquad (36)$$

$$u_1 - v_1 = \sigma(\cos\frac{1}{3}\varphi + i\sin\frac{1}{3}\varphi) - \sigma(\cos\frac{1}{3}\varphi - i\sin\frac{1}{3}\varphi) = 2\sigma i\sin\frac{1}{3}\varphi \qquad (37)$$

Door combinatie van de formules (20), (21) en (22) met de formules (36) en (37) worden voorts de volgende drie waarden van y verkregen:

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2\sigma\cos\frac{1}{3}\varphi$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1 + i\sqrt{3}(u_1 - v_1)) = -\frac{1}{2}(2\sigma\cos\frac{1}{3}\varphi + i\sqrt{3}\cdot 2\sigma i\sin\frac{1}{3}\varphi) = -\sigma(\cos\frac{1}{3}\varphi - \sqrt{3}\sin\frac{1}{3}\varphi)$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1 - i\sqrt{3}(u_1 - v_1)) = -\frac{1}{2}(2\sigma\cos\frac{1}{3}\varphi - i\sqrt{3}\cdot 2\sigma i\sin\frac{1}{3}\varphi) = -\sigma(\cos\frac{1}{3}\varphi + \sqrt{3}\sin\frac{1}{3}\varphi)$$

Toepassen van (6) geeft tenslotte de drie oplossingen voor x, waarbij σ en φ zijn te bepalen via (34) en (35), terwijl p en q zijn gedefiniëerd volgens (3) en (4). Opmerkelijk is, dat alle oplossingen reële getallen zijn, ondanks dat de beide waarden van u_1 en v_1 hier complexe getallen zijn.

$$x_1 = 2\sigma\cos\frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3}a \qquad (38)$$

$$x_2 = -\sigma(\cos\frac{1}{3}\varphi - \sqrt{3}\sin\frac{1}{3}\varphi) - \frac{1}{3}a = -2\sigma\cos(\frac{1}{3}\varphi + \frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{3}a \qquad (39)$$

$$x_3 = -\sigma(\cos\frac{1}{3}\varphi + \sqrt{3}\sin\frac{1}{3}\varphi) - \frac{1}{3}a = -2\sigma\cos(\frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{3}a \qquad (40)$$

met: $\sigma = \sqrt{-\frac{1}{3}p}$ en $\cos\varphi = \frac{-q}{2\sigma^3}$

en: $p = -\frac{1}{3}a^2 + b$ en $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$

De rechter uitdrukkingen in (39) en (40) zijn wat eenvoudiger van vorm en symmetrisch ten opzichte van (38). Ze kunnen worden verklaard met de goniometrische identiteit:

$$2\cos(\frac{1}{3}\varphi \pm \frac{1}{3}\pi) = 2(\cos\frac{1}{3}\varphi\cos\frac{1}{3}\pi \mp \sin\frac{1}{3}\varphi\sin\frac{1}{3}\pi) = \cos\frac{1}{3}\varphi \mp \sqrt{3}\sin\frac{1}{3}\varphi$$