

## 1. Afleiding van de vergelijking van de ellips

In de nevenstaande figuur 1 is een ellips afgebeeld waarvan het middelpunt samenvalt met de oorsprong O van een coördinatenstelsel met horizontale x-as en verticale y-as. Per definitie is een ellips de verzameling van punten P in een plat vlak, die de eigenschap hebben, dat de som van de afstanden van deze punten tot twee vaste punten constant is en groter dan de afstand tussen deze vaste punten.

In de figuur zijn de twee vaste punten  $F_1$  en  $F_2$ , die brandpunten worden genoemd. In de tekening zijn deze zo gesitueerd, de oorsprong O het midden vormt van het lijnstuk  $F_1F_2$  met lengte  $2c$ , zodat  $OF_1 = OF_2 = c$ . De genoemde constante afstand is gelijk aan  $2a = PF_1 + PF_2$ . De vorm en alle nog af te leiden eigenschappen van de ellips worden bepaald door de grootte van louter deze twee positieve parameters  $a$  en  $c$ .

Door toepassing van de stelling van Pythagoras op de driehoeken  $PKF_1$  en  $PKF_2$  kan de vergelijking van de ellips worden afgeleid. Daarbij zijn  $x$  en  $y$  de coördinaten van een punt P op de ellips, en worden de lengtes van  $PF_1$  en  $PF_2$  voorgesteld door respectievelijk  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ :

$$PF_1^2 = PK^2 + KF_1^2 \quad \rightarrow \quad \lambda_1^2 = (c - x)^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \sqrt{(c - x)^2 + y^2} \quad (1)$$

$$PF_2^2 = PK^2 + KF_2^2 \quad \rightarrow \quad \lambda_2^2 = (c + x)^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = \sqrt{(c + x)^2 + y^2} \quad (2)$$

Volgens de definitie van de ellips geldt:  $2a = \lambda_1 + \lambda_2 = \sqrt{(c - x)^2 + y^2} + \sqrt{(c + x)^2 + y^2}$  (3)

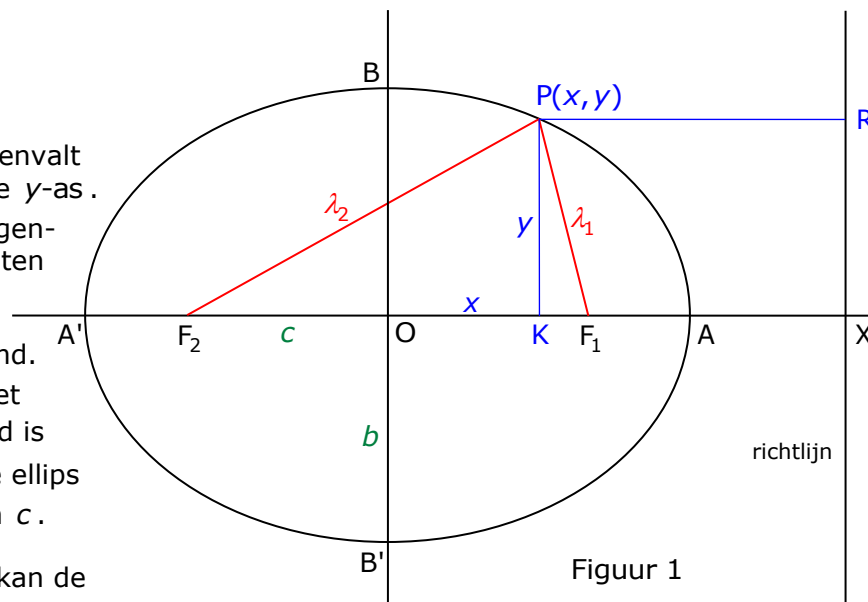
Uitwerking van vergelijking (3) geeft:  $(2a - \sqrt{(c - x)^2 + y^2})^2 = (c + x)^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad a\sqrt{(c - x)^2 + y^2} = a^2 - cx$

Kwadrateren en vervolgens vereenvoudigen van de laatste vergelijking leidt tot:  $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$  (4)

In vergelijking (4) wordt nu een factor  $b^2$  geïntroduceerd, zodat  $b^2 = a^2 - c^2$  met  $0 < b \leq a$ . In het vervolg zal blijken, dat de parameter  $b$  een geometrische betekenis heeft. (5)

Substitutie van  $b^2$  in vergelijking (4) levert de vergelijking van de ellips op:  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  (6)

Deze vergelijking kan ook in een eenvoudiger vorm (de standaardvorm) worden genoteerd:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (7)



## 2. Eigenschappen van de ellips

Omdat in vergelijking (6) alleen  $x^2$  en  $y^2$  voorkomt volgt, dat de ellips een symmetrische curve is ten opzichte van de  $x$ -as en de  $y$ -as, dus ook ten opzichte van de oorsprong  $O$ . Vervanging van  $x$  door  $-x$  resp.  $y$  door  $-y$  laat de vergelijking immers ongewijzigd.

Invullen van  $y = 0$  in de vergelijking van de ellips geeft  $x = a$  en  $x = -a$  als oplossing, zodat  $OA = OA' = a$ . De punten  $A(a, 0)$  en  $A'(-a, 0)$  bevinden zich op de horizontale as van de ellips. De lengte  $a$  wordt daarom de halve lange as van de ellips genoemd.

Voor  $x = 0$  zijn de  $y$ -waarden  $b$  resp.  $-b$ , zodat de punten  $B(0, b)$  en  $B'(0, -b)$  op de verticale as gelegen zijn. De lengte  $b = OB = OB'$  wordt daarom de halve korte as van de ellips genoemd. Deze geometrische betekenis van de parameter  $b$  leidt ook tot de formule (5)

door toepassing van de stelling van Pythagoras op driehoek  $OF_1B$  met  $BF_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = a$ :  $OB^2 = BF_1^2 - OF_1^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

De verhouding  $\frac{b}{a}$  is bepalend voor de vorm van de ellips. Als  $a = b$  gaat de ellips over in een cirkel, waarbij de brandpunten  $F_1$  en  $F_2$  samenvallen met de oorsprong. Hier is immers  $c^2 = a^2 - b^2 = 0$ , zodat  $OF_1 = OF_2 = c = 0$ .

Als de verhouding  $\frac{b}{a}$  afneemt, zal de vorm van de ellips platter en langwerpiger worden en zijn de brandpunten  $F_1$  en  $F_2$  verder van de oorsprong  $O$  verwijderd. Dit kan worden geïllustreerd door de vergelijking (5) te noteren in de vorm  $c^2 = a^2(1 - \frac{b^2}{a^2})$ . Hieruit blijkt, dat naarmate de verhouding  $\frac{b}{a}$  verder afneemt, het verschil tussen de waarde van  $c$  en  $a$  steeds kleiner wordt. Het langgerekt zijn van de ellips manifesteert zich dus door de mate van excentriciteit ('het uit centrum zijn') van de brandpunten.

De excentriciteit  $e$ , een maat voor deze langwerpigheid, is als volgt gedefiniëerd: 
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (8)$$

Volgens definitie (5) is  $0 < b \leq a$ , zodat voor de excentriciteit van een ellips altijd geldt: 
$$0 \leq e < 1$$

Omdat  $c = ea$  kan de halve lange as  $b$  ook als volgt worden uitgedrukt: 
$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - e^2) \rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (9)$$

zodat de vergelijking van de ellips ook kan worden genoteerd als: 
$$x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = a^2 \quad \text{of} \quad (1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2) \quad (10)$$

De afstand  $F_1P$  en  $F_2P$  tot een willekeurig punt  $P$  op de ellips wordt de focale radius genoemd. Met behulp van de laatste vergelijking (10) kunnen voor de focale radii eenvoudiger relaties worden afgeleid:

$$PF_1^2 = \lambda_1^2 = (c - x)^2 + y^2 = (ea - x)^2 + a^2(1 - e^2) - (1 - e^2)x^2 = (a - ex)^2 \quad \rightarrow \quad PF_1 = \lambda_1 = a - ex$$

Analoog volgt voor het lijnstuk  $PF_2$  :  $PF_2 = \lambda_2 = a + ex$  (11)

Aan de vergelijkingen (11) is onmiddellijk te zien, dat  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2a = \text{constant}$  .

De formules (11) onthullen nog een ander interessant fenomeen van de ellips, namelijk het bestaan van een richtlijn. Door de afstand  $PF_1$  te noteren als  $PF_1 = \lambda_1 = e\left(\frac{a}{e} - x\right)$  is duidelijk, dat de focale radius  $PF_1$  een factor  $e$  kleiner is dan de afstand  $\frac{a}{e} - x$  . De verticale lijn met vergelijking  $x = \frac{a}{e}$  wordt richtlijn genoemd en snijdt de horizontale as in punt  $X$  . De afstand  $\frac{a}{e} - x$  komt overeen met het lijnstuk  $RP$  .

De vorm van de elliptische curve kan dus ook als volgt worden gedefiniëerd:

Een ellips is de verzameling van punten  $P$  , waarbij de verhouding van de afstand van  $P$  tot het brandpunt  $F_1$  en de afstand van  $P$  tot de richtlijn gelijk is aan de excentriciteit  $e$  . (12)

Voor elk punt  $P$  van de ellips geldt dus: (13)

$$\frac{PF_1}{PR} = \frac{\lambda_1}{PR} = \frac{a - ex}{\frac{a}{e} - x} = e$$

Ook voor punt  $A$  , het snijpunt van de ellips met de horizontale as, geldt relatie (13), zodat:

$$\frac{AF_1}{AX} = e = \frac{a - c}{\frac{a}{e} - a} = \frac{a - ea}{\frac{a}{e} - a}$$

Voor het tweede brandpunt  $F_2$  geldt analoog, dat er een richtlijn bestaat met vergelijking  $x = -\frac{a}{e}$  . Deze is in figuur 1 weggelaten.

Als het snijpunt van deze tweede richtlijn met de horizontale as  $X'$  wordt genoemd, en de afstand van een punt  $P$  tot de richtlijn wordt voorgesteld door lijnstuk  $PR'$  , dan geldt eveneens (door symmetrie t.o.v. de verticale as): (14)

$$\frac{PF_2}{PR'} = \frac{A'F_2}{A'X'} = e = \frac{AF_1}{AX} = \frac{PF_1}{PR}$$

### 3. De raaklijn aan de ellips

In een willekeurig punt  $P(x_0, y_0)$  wordt een [raaklijn](#) QR aan de ellips getrokken. Dit betekent, dat deze lijn slechts één punt P met de ellips gemeen heeft. In het algemeen zal een lijn, die de ellips snijdt twee snijpunten hebben, zodat ook kan worden gesteld, dat bij een raaklijn de twee snijpunten samenvallen. Zie figuur 2.

De algemene vergelijking van een lijn die door een punt  $P(x_0, y_0)$  gaat luidt:

$$y - y_0 = h(x - x_0) \quad (15)$$

De grootte van de [richtingscoëfficiënt](#)  $h$  zal nu zo worden bepaald, dat deze lijn raakt aan de ellips. Aldus zal een vergelijking van de raaklijn worden opgesteld.

Substitutie van  $y = hx - hx_0 + y_0$  in de vergelijking van de ellips levert:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \rightarrow \quad b^2x^2 + a^2(hx - hx_0 + y_0)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2h^2x^2 + a^2h^2x_0^2 + a^2y_0^2 - 2a^2h^2xx_0 + 2a^2hxy_0 - 2a^2hx_0y_0 = a^2b^2$$

$$x^2(a^2h^2 + b^2) - 2a^2hx(hx_0 - y_0) + a^2((hx_0 - y_0)^2 - b^2) = 0 \quad (16)$$

Opdat de [vierkantsvergelijking](#) (16) twee gelijke oplossingen heeft (samenvallende snijpunten), zal de [discriminant](#)  $D = 0$  dienen te zijn.

$$D = 4a^4h^2(hx_0 - y_0)^2 - 4a^2(a^2h^2 + b^2)((hx_0 - y_0)^2 - b^2) = 0 \quad (17)$$

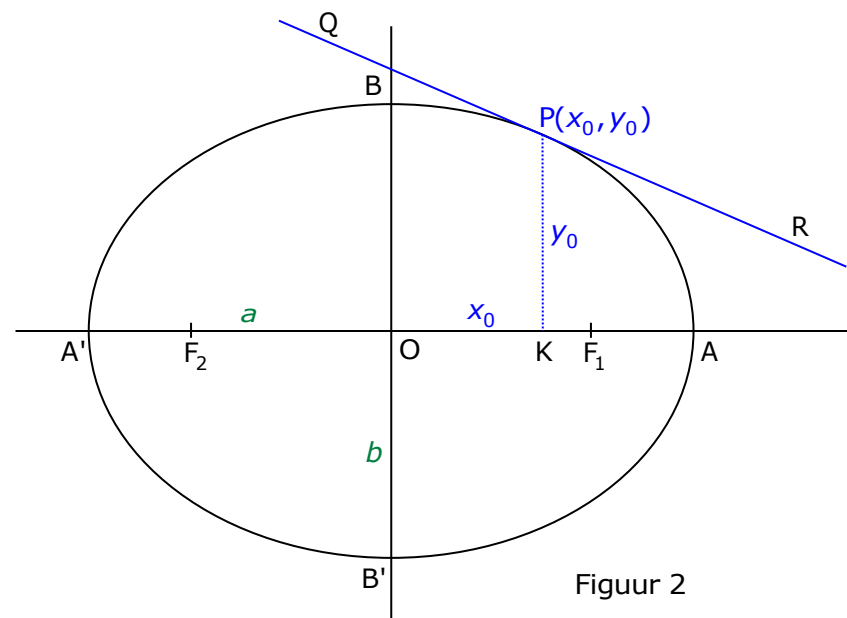
Na delen door  $4a^2$  en uitwerken van het rechter deel van de vorige vergelijking (17) volgt:

$$a^2h^2(hx_0 - y_0)^2 - a^2h^2(hx_0 - y_0)^2 + a^2h^2b^2 - b^2(hx_0 - y_0)^2 + b^4 = 0$$

Delen door  $b^2$  levert dan het volgende resultaat:  $a^2h^2 + b^2 = (hx_0 - y_0)^2 \quad (18)$

Uitwerking van (18) levert de vierkantsvergelijking, waaruit  $h$  kan worden opgelost:  $h^2(x_0^2 - a^2) - 2hx_0y_0 + y_0^2 - b^2 = 0 \quad (19)$

De discriminant  $d$  van de laatste vergelijking (19) is:  $d = 4(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2) \quad (20)$



Het punt  $P(x_0, y_0)$  is op de ellips gelegen en voldoet dus aan vergelijking (6), waardoor  $d = 0$ .

De enige oplossing  $h$  van vergelijking (19) is derhalve:

$$h = \frac{2x_0 y_0}{2(x_0^2 - a^2)} = \frac{b^2 x_0 y_0}{b^2(x_0^2 - a^2)} = \frac{b^2 x_0 y_0}{b^2 x_0^2 - a^2 b^2} = \frac{b^2 x_0 y_0}{-a^2 y_0^2} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \quad (21)$$

Hetzelfde resultaat voor de richtingscoëfficiënt  $h$  kan veel sneller verkregen worden met [differentiaalrekening](#). Deze is namelijk eenvoudig te bepalen door impliciet differentiëren naar  $x$  van de vergelijking (6):

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad \rightarrow \quad 2b^2 x + 2a^2 y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad h = \left(\frac{dy}{dx}\right)_P = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

De vergelijking van de raaklijn (15) is dus te schrijven als:  $y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0)$  (22)

Uitwerking van (22) in combinatie met (6) geeft:  $a^2 y_0 (y - y_0) = -b^2 x_0 (x - x_0) \rightarrow b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$

Delen door  $a^2 b^2$  geeft tenslotte de vergelijking van de raaklijn:  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$  (23)

Indien er sprake is van een raaklijn ( $D = 0$ ), is de enige oplossing van  $x$  bij vergelijking (16), door toepassing van (18):

$$x = \frac{2a^2 h (hx_0 - y_0)}{2(a^2 h^2 + b^2)^2} = \frac{a^2 h (hx_0 - y_0)}{(hx_0 - y_0)^2} = \frac{a^2 h}{hx_0 - y_0} \quad (24)$$

Hieruit volgt voor  $y$ , via (15), eveneens na toepassing van (24) en (18):

$$y = hx - (hx_0 - y_0) = \frac{a^2 h^2}{hx_0 - y_0} - (hx_0 - y_0) = -\frac{b^2}{hx_0 - y_0} \quad (25)$$

Het zal niet verbazen, dat invullen in de laatste formules van de waarde van  $h$  volgens (21) resulteert in de uitkomsten  $x = x_0$  en  $y = y_0$ .

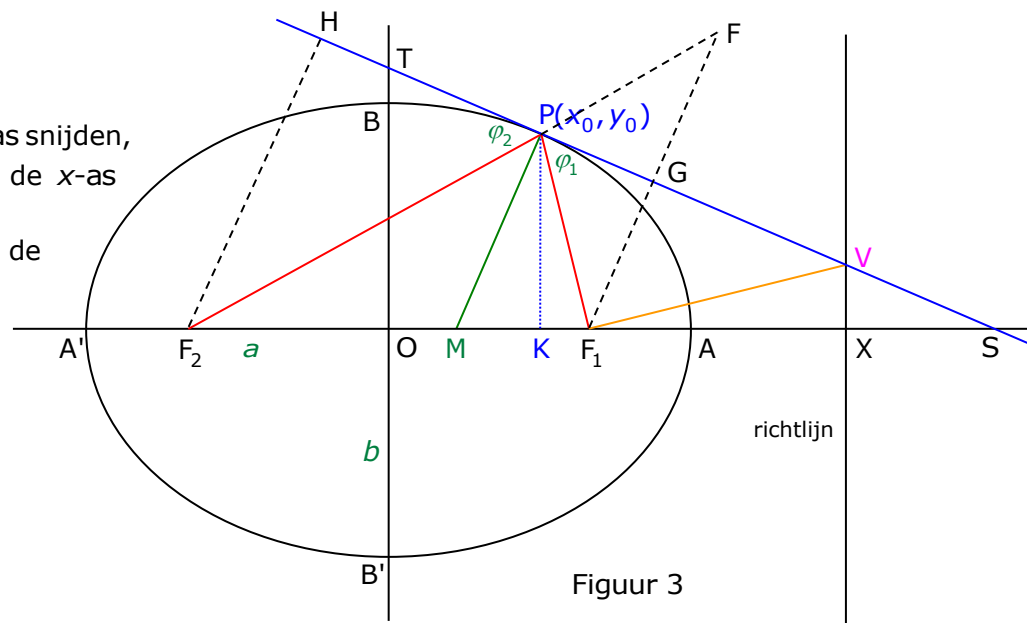
#### 4. Enkele eigenschappen van de raaklijn

In het algemeen zal een raaklijn aan de ellips zowel de  $x$ -as als de  $y$ -as snijden, behalve indien deze raakt aan de punten  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  of  $B'$ , waarbij alleen de  $x$ -as respectievelijk de  $y$ -as gesneden wordt.

In de nevenstaande figuur snijdt de raaklijn in  $P$  de  $x$ -as in punt  $S$  en de  $y$ -as in punt  $T$ . De coördinaten van deze punten, respectievelijk de lijnstukken  $OS$  en  $OT$  kunnen met de vergelijking van de raaklijn op eenvoudige wijze worden vastgesteld:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot 0}{b^2} = 1 \rightarrow OS = x_S = \frac{a^2}{x_0} \quad (26)$$

$$\frac{x_0 \cdot 0}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \rightarrow OT = y_T = \frac{b^2}{y_0} \quad (27)$$



Figuur 3

Het bijzondere van het resultaat (26) is, dat de  $x$ -coördinaat van het snijpunt  $S$  slechts afhangt van de grootte van de halve lange as  $a$  en van de  $x$ -coördinaat van het raakpunt, maar niet van de halve korte as  $b$  of de excentriciteit  $e$ . Dit betekent dat de raaklijnen van alle ellipsen met dezelfde waarde van  $a$ , maar met verschillende excentriciteit  $e$ , hetzelfde snijpunt  $S$  hebben (evenals de cirkel met straal  $a$  en excentriciteit  $e = 0$ ), zolang tenminste het raakpunt op de rechte  $PK$  ligt (met vergelijking  $x = x_0$ ).

Met andere woorden, vanuit punt  $S$  is een lijnenbundel te tekenen, begrensd door de twee raaklijnen aan de cirkel met straal  $a$ , zodat alle lijnen in de punten  $P(x_0, \sqrt{(1 - e^2)(a^2 - x_0^2)})$  raken aan ellipsen met gelijke halve lange as  $a$  en verschillende excentriciteit  $e$ .

Analoog geldt dit ook voor snijpunt  $T$ , waarbij volgens (27) de raaklijnen aan alle ellipsen met gelijke halve korte as  $b$  en verschillende excentriciteit  $e$  hetzelfde snijpunt  $T$  hebben, indien de raakpunten op een horizontale lijn door  $P$  gelegen zijn (met vergelijking  $y = y_0$ ).

Een minder voor de hand liggende eigenschap van de raaklijn is de volgende:

De verbindingslijn van een brandpunt en het snijpunt van raaklijn en richtlijn staat loodrecht op de focale radius van het raakpunt. (28)

Voor het brandpunt  $F_1$  betekent dit, dat de lijn  $PF_1$  loodrecht staat op de lijn  $F_1V$ , dus  $\angle PF_1V = 90^\circ$ . Voor het brandpunt  $F_2$  geldt deze eigenschap eveneens, maar dan voor de tweede (niet getekende) richtlijn.

Analytisch bewijs (zie figuur 3)

De  $x$ -coördinaat van punt  $V$  is gelijk aan die van de richtlijn, dus  $x_v = \frac{a}{e}$

De  $y$ -coördinaat kan dan berekend worden, door deze  $x$ -waarde in te vullen in de vergelijking van de raaklijn (23):

$$\frac{x_0 x_v}{a^2} + \frac{y_0 y_v}{b^2} = \frac{x_0 \frac{a}{e}}{a^2} + \frac{y_0 y_v}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad y_v = \frac{b^2}{y_0} \left(1 - \frac{x_0}{ae}\right)$$

De helling  $m_1$  van de verbindingslijn  $F_1V$  is dan:

$$m_1 = \frac{y_v - y_{F_1}}{x_v - x_{F_1}} = \frac{\frac{b^2}{y_0} \left(1 - \frac{x_0}{ae}\right) - 0}{\frac{a}{e} - ae} = \frac{b^2}{y_0} \cdot \frac{ae - x_0}{a^2(1 - e^2)} = \frac{ae - x_0}{y_0} \quad (29)$$

De helling  $m_2$  van de focale radius  $PF_1$  is:

$$m_2 = \frac{y_p - y_{F_1}}{x_p - x_{F_1}} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - ae} = \frac{y_0}{x_0 - ae} = -\frac{y_0}{ae - x_0} \quad (30)$$

Hieruit blijkt dat  $m_1 m_2 = -1$ , waarmee bewezen is, dat de lijnen  $PF_1$  en  $F_1V$  elkaar loodrecht snijden in het brandpunt.

Geometrisch bewijs

In de nevenstaande figuur zijn  $P$  en  $P'$  punten van de ellips en snijdt de lijn door deze punten de richtlijn in  $V$ . De lijnstukken  $PQ$  en  $P'Q'$  zijn de afstanden van genoemde

punten tot de richtlijn, waarvoor geldt volgens (12) en (13):

$$\frac{PF_1}{PQ} = \frac{P'F_1}{P'Q'} = e$$

De gelijkvormigheid van de driehoeken  $PQV$  en  $P'Q'V$  impliceert:

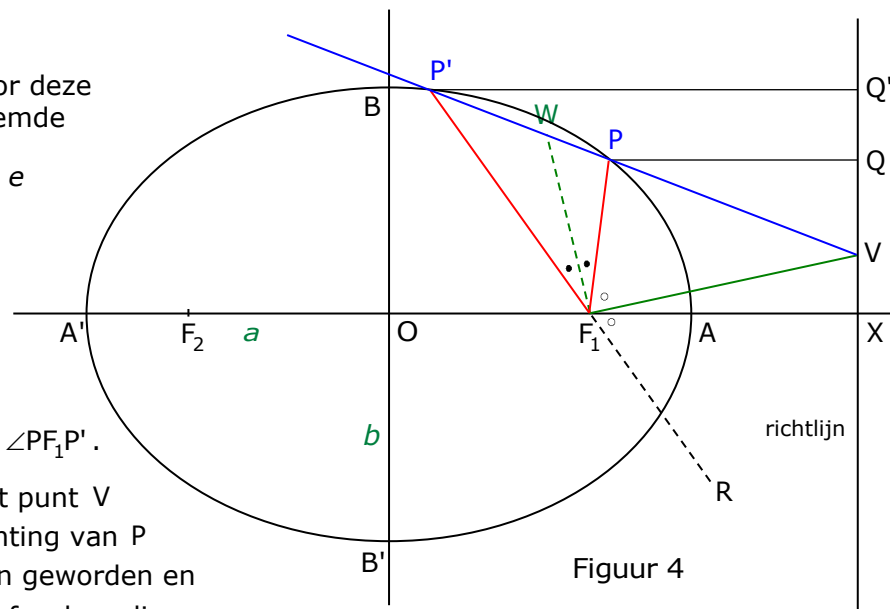
$$\frac{PV}{PQ} = \frac{P'V}{P'Q'}$$

Hieruit volgt dat  $\frac{PF_1}{P'F_1} = \frac{PV}{P'V}$  waardoor de lijn  $F_1V$  bisectrice is van  $\angle PF_1R$ , de

buitenhoek van driehoek  $PP'F_1$ . Zie Euclides, boek VI stelling A in appendix 2.

De normaal in  $F_1$  op  $F_1V$ , het lijnstuk  $F_1W$ , is dus bisectrice van de binnenhoek  $\angle PF_1P'$ .

Wanneer het punt  $P'$  langs de ellips in de richting van  $P$  wordt bewogen, zal het punt  $V$  langs de richtlijn naar beneden bewegen, terwijl het punt  $W$  eveneens in de richting van  $P$  beweegt. Op het moment dat  $P'$  en  $W$  samenvallen met  $P$ , is de lijn  $PV$  raaklijn geworden en valt  $F_1W$  samen met de focale radius  $PF_1$ . De lijn  $F_1V$  staat dan loodrecht op de focale radius.



Een bijzondere eigenschap van de raaklijn aan de ellips is, dat de hoeken  $\varphi_1 = \angle F_1PS$  en  $\varphi_2 = \angle F_2PT$  gelijk zijn. (zie figuur 3)

Dit wordt de [optische eigenschap](#) van de raaklijn genoemd: bij een spiegelend elliptisch oppervlak wordt een lichtstraal, die vanuit de richting van het ene brandpunt komt, weerkaatst in de richting van het andere brandpunt.

### Analytisch bewijs 1

Eén manier om te bewijzen dat  $\varphi_1 = \varphi_2$ , is door gebruik te maken van genoemd snijpunt S van de raaklijn met de x-as.

Daartoe worden de loodlijnen  $F_1G$  en  $F_2H$  vanuit de brandpunten op de raaklijn getrokken. Als kan worden bewezen, dat de driehoeken  $PGF_1$  en  $PHF_2$  gelijkvormig zijn, volgt daaruit onmiddellijk de gelijkenis van de hoeken.

Uit de figuur volgt, dat de driehoeken  $F_1GS$  en  $F_2HS$  gelijkvormig zijn, omdat beide driehoeken een rechte hoek bezitten en  $\angle F_1SG$  gemeenschappelijk hebben.

Indien gebruik wordt gemaakt van de excentriciteit  $e = \frac{c}{a}$  volgens formule (8) en van de formules (11),  $\lambda_1 = a - ex_0$  en  $\lambda_2 = a + ex_0$ ,

dan geldt:

$$\frac{F_1G}{F_2H} = \frac{F_1S}{F_2S} = \frac{OS - OF_1}{OS + OF_2} = \frac{\frac{a^2}{x_0} - c}{\frac{a^2}{x_0} + c} = \frac{a^2 - cx_0}{a^2 + cx_0} = \frac{a - \frac{c}{a}x_0}{a + \frac{c}{a}x_0} = \frac{a - ex_0}{a + ex_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{F_1P}{F_2P} \quad (31)$$

De [proportionaliteit](#) van de twee zijden van de driehoeken  $PGF_1$  en  $PHF_2$  bewijst, dat deze driehoeken gelijkvormig zijn, zodat ze ook gelijke hoeken hebben, dus  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

### Analytisch bewijs 2

Een andere manier om de gelijkenis van de hoeken  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  te bewijzen, is de hoeken te bepalen via de vergelijkingen van enerzijds de raaklijn en anderzijds van de twee focale radii, de lijnen  $F_1P$  en  $F_2P$ . Daarvoor zijn de richtingscoëfficiënten van deze drie lijnen nodig, die respectievelijk  $h$ ,  $h_1$  en  $h_2$  zullen worden genoemd (zie ook formules (21) en (9) met betrekking tot  $h$ ):

$$h = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} = -(1 - e^2)\frac{x_0}{y_0} \quad h_1 = \frac{y_p - y_{F_1}}{x_p - x_{F_1}} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - c} = \frac{y_0}{x_0 - ea} \quad h_2 = \frac{y_p - y_{F_2}}{x_p - x_{F_2}} = \frac{y_0 - 0}{x_0 + c} = \frac{y_0}{x_0 + ea} \quad (32)$$

De richtingscoëfficiënt van een rechte lijn is de [tangens](#) van de hoek, die deze lijn maakt met de horizontale as, dus stel nu het volgende:



- $\alpha$  = de hoek van de raaklijn met de  $x$ -as  $\rightarrow \tan \alpha = h = -(1 - e^2) \frac{x_0}{y_0}$
- $\alpha_1$  = de hoek van de focale radius  $F_1P$  met de  $x$ -as  $\rightarrow \tan \alpha_1 = h_1 = \frac{y_0}{x_0 - ea}$
- $\alpha_2$  = de hoek van de focale radius  $F_2P$  met de  $x$ -as  $\rightarrow \tan \alpha_2 = h_2 = \frac{y_0}{x_0 + ea}$

dan geldt voor de hoeken  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} \tan \varphi_1 &= \tan(\alpha - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha \tan \alpha_1} = \frac{h - h_1}{1 + h h_1} \\ \tan \varphi_2 &= \tan(180 - (\alpha - \alpha_2)) = -\tan(\alpha - \alpha_2) = -\frac{\tan \alpha - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha \tan \alpha_2} = -\frac{h - h_2}{1 + h h_2} \end{aligned} \quad (33)$$

Substitutie van de uitdrukkingen (32) van  $h$ ,  $h_1$  en  $h_2$  in de formules (33) geeft:

$$\begin{aligned} \tan \varphi_1 &= \frac{h - h_1}{1 + h h_1} = \frac{-\frac{(1 - e^2)x_0}{y_0} - \frac{y_0}{x_0 - ea}}{1 - \frac{(1 - e^2)x_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0 - ea}} = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{(1 - e^2)(x_0 - ea)x_0 + y_0^2}{x_0 - ea - (1 - e^2)x_0} = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{x_0^2 - e a x_0 - e^2 x_0^2 + e^3 a x_0 + y_0^2}{x_0 - ea - x_0 + e^2 x_0} = \\ &= -\frac{1}{y_0} \cdot \frac{(1 - e^2)x_0^2 + y_0^2 - e a x_0(1 - e^2)}{-e(a - e x_0)} = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{a^2(1 - e^2) - e a x_0(1 - e^2)}{e(a - e x_0)} = \frac{a}{y_0} \cdot \frac{(a - e x_0)(1 - e^2)}{e(a - e x_0)} = \frac{a}{y_0} \cdot \frac{1 - e^2}{e} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tan \varphi_2 &= -\frac{h - h_2}{1 + h h_2} = -\frac{-\frac{(1 - e^2)x_0}{y_0} - \frac{y_0}{x_0 + ea}}{1 - \frac{(1 - e^2)x_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0 + ea}} = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{(1 - e^2)(x_0 + ea)x_0 + y_0^2}{x_0 + ea - (1 - e^2)x_0} = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{x_0^2 + e a x_0 - e^2 x_0^2 - e^3 a x_0 + y_0^2}{x_0 + ea - x_0 + e^2 x_0} = \\ &= \frac{1}{y_0} \cdot \frac{(1 - e^2)x_0^2 + y_0^2 + e a x_0(1 - e^2)}{e(a + e x_0)} = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{a^2(1 - e^2) + e a x_0(1 - e^2)}{e(a + e x_0)} = \frac{a}{y_0} \cdot \frac{(a + e x_0)(1 - e^2)}{e(a + e x_0)} = \frac{a}{y_0} \cdot \frac{1 - e^2}{e} \end{aligned} \quad (35)$$

Hieruit blijkt dat  $\varphi_1 = \varphi_2$ , want:  $\tan \varphi_1 = \tan \varphi_2 = \frac{a}{y_0} \cdot \frac{1 - e^2}{e}$  (36)

### Analytisch bewijs 3

Een derde bewijs berust op een eigenschap van de loodlijn door  $P(x_0, y_0)$  op de raaklijn, de normaal  $PM$ . Als kan worden bewezen, dat deze normaal een bisectrice is van  $\angle F_1PF_2$  (die deze hoek door midden deelt), dan is  $\angle F_1PM = \angle F_2PM$ , waaruit volgt dat  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Een eigenschap van de bisectrice is, dat deze de overstaande zijde van een driehoek zodanig verdeelt, dat de twee gevormde lijnstukken zich verhouden als de aanliggende zijden. Zie Euclides, Boek VI stelling 3 in appendix 1.

Dat houdt in dit geval in, dat dient te worden bewezen dat  $\frac{MF_1}{MF_2} = \frac{PF_1}{PF_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ . (37)

Door de  $x$ -coördinaat van punt  $M$ , het snijpunt van de normaal met de  $x$ -as, te bepalen, is de verhoudingsformule (37) te verifiëren.

De normaal door  $P$  heeft een richtingscoëfficiënt  $r$ , die de negatieve [reciproke](#) waarde is van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, dus volgens (21) en (9) is deze gelijk aan  $r = -\frac{1}{h} = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} = \frac{y_0}{(1-e^2)x_0}$  (38)

De vergelijking van de normaal in  $P$  is dus:  $y - y_0 = \frac{y_0}{(1-e^2)x_0} (x - x_0)$  (39)

Hieruit volgt voor  $y = 0$  de  $x$ -coördinaat van punt  $M$ :  $x_M = e^2 x_0 = OM$  (40)

Vervolgens geldt dan, waarbij de formules (8) en (11) worden toegepast:

$$\frac{MF_1}{MF_2} = \frac{OF_1 - OM}{OF_2 + OM} = \frac{c - e^2 x_0}{c + e^2 x_0} = \frac{\frac{c}{e} - e x_0}{\frac{c}{e} + e x_0} = \frac{a - e x_0}{a + e x_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{PF_1}{PF_2} \quad (41)$$

Daarmee is de relatie (37) bewezen, dus dat  $PM$  een bisectrice is van  $\angle F_1PF_2$ , zodat  $\angle F_1PM = \angle F_2PM$ , waaruit volgt dat  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

#### Analytisch bewijs 4

De focale radius  $F_2P$  (lengte  $\lambda_2$ ) wordt verlengd tot punt  $F$ , waarbij het verlengde deel  $PF = PF_1 = \lambda_1$ . Hierdoor ontstaat de driehoek  $F_1PF$ . Slechts indien het lijnstuk  $FF_1$  in deze driehoek loodrecht staat op de raaklijn, hebben de driehoeken  $F_1PG$  en  $FPG$  behalve een gemeenschappelijk zijde  $PG$  en een zijde van gelijke lengte  $\lambda_1$ , ook een rechte hoek gemeen. Dan zijn genoemde driehoeken [congruent](#), zodat direct volgt dat  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Te bewijzen is dus, dat de lijn  $FF_1$  en de raaklijn loodrecht op elkaar staan. Zie hiervoor figuur 3.

Volgens (32) is de helling van de raaklijn  $h = -(1 - e^2) \frac{x_0}{y_0}$ , zodat te bewijzen is, dat de helling van de lijn  $FF_1$  gelijk is aan de negatieve

reciproke waarde van  $h$ , dus volgens (38) gelijk aan de helling van de normaal  $PM$ :  $r = -\frac{1}{h} = \frac{y_0}{(1 - e^2)x_0}$

De coördinaten van hoekpunt  $F$  zullen worden berekend via de verlengingsfactor:  $f = \frac{F_2F}{F_2P} = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2a}{\lambda_2} = \frac{2a}{a + ex_0}$  (42)

$$x_F = x_{F_2} + f(x_P - x_{F_2}) = -ea + \frac{2a}{a + ex_0}(x_0 + ea) = \frac{a(-ea - e^2x_0 + 2x_0 + 2ea)}{a + ex_0} = \frac{a(2x_0 - e^2x_0 + ea)}{a + ex_0} \quad (43)$$

$$y_F = y_{F_2} + f(y_P - y_{F_2}) = 0 + \frac{2a}{a + ex_0}(y_0 - 0) = \frac{2ay_0}{a + ex_0} \quad (44)$$

Voor de helling van  $FF_1$  geldt dan, volgens de coördinaten van hoekpunt  $F$  in (43) en (44):

$$\text{helling } FF_1 = \frac{y_F - y_{F_2}}{x_F - x_{F_2}} = \frac{\frac{2ay_0}{a + ex_0} - 0}{\frac{a(2x_0 - e^2x_0 + ea)}{a + ex_0} - ea} = \frac{2y_0}{2x_0 - e^2x_0 + ea - ea - e^2x_0} = \frac{y_0}{(1 - e^2)x_0} = r \quad (45)$$

Hiermee is bewezen, dat de lijn  $FF_1$  loodrecht staat op de raaklijn, zodat de driehoeken  $F_1PG$  en  $FPG$  congruent zijn, waarmee  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Zoals hiervoor besproken, is de helling  $r$  gelijk aan de helling van de normaal op de raaklijn door  $P$ , zodat de lijn  $FF_1$  evenwijdig is aan  $PM$ , de bisectrice van de hoek tussen de focale radii.

### Geometrisch bewijs

In de nevenstaande figuur 5 is de lijn  $F_1L$  getekend, die loodrecht staat op de  $x$ -as en de raaklijn  $TPV$  snijdt in het punt  $L$ . De normaal  $PM$  op de raaklijn in  $P$  snijdt de  $x$ -as in het punt  $M$ . Het lijnstuk  $PQ$  staat loodrecht op de richtlijn en heeft, zoals besproken bij (13), met de focale radius  $PF_1$  de volgende relatie:  $\frac{PF_1}{PQ} = \frac{AF_1}{AX} = e$ .

Op pagina 7 is het geometrisch bewijs geleverd, dat de focale radius  $PF_1$  loodrecht staat op de verbindinglijn van het brandpunt  $F_1$  en het snijpunt  $V$  van raaklijn en richtlijn. In de figuur is  $\angle PF_1V$  dus  $90^\circ$ .

In de vierhoek  $PF_1VQ$  zijn twee rechte hoeken aanwezig:  $\angle PF_1V$  en  $\angle PQV$ . Daarom kan om deze vierhoek een [omgeschreven cirkel](#) worden beschreven met  $PV$  als middellijn. Op deze cirkel is de cirkelboog  $PF_1$  zowel de [omtrekshoek](#)  $PQF_1$  als de omtrekshoek  $PVF_1$ , de hoek die in het vervolg wordt aangeduid als  $\alpha$  (in de figuur  $\bullet$ ). Daarom geldt:  $\alpha = \angle PVF_1 = \angle PQF_1$ .

Bovendien is  $\angle VF_1L = \angle QPF_1$ , aangeduid als  $\beta$  (in de figuur  $\circ$ ), want beide hoeken zijn het [complement](#) van het hoekje  $PF_1L$ . De driehoeken  $LF_1V$  en  $F_1PQ$  hebben daarom de hoeken  $\alpha$  en  $\beta$  gemeen en zijn dus gelijkvormig.

Hieruit volgt, dat de volgende verhoudingen geldig zijn: 
$$\frac{F_1L}{F_1V} = \frac{PF_1}{PQ} = e = \frac{AF_1}{AX} \quad (46)$$

In de figuur is nog een driehoek gelijkvormig met de hiervoor genoemde. Dit betreft driehoek  $MF_1P$ , waarin  $\angle PF_1M = \beta = \angle F_1PQ$ .

In de driehoek  $PF_1V$  is  $\angle VPF_1$  het complement van  $\alpha = \angle PVF_1$ , immers  $\angle PF_1V = 90^\circ$ .

In de driehoek  $MF_1P$  is dezelfde hoek  $\angle VPF_1$  het complement van  $\angle F_1PM$ , want  $\angle VPM$  is eveneens  $90^\circ$ .

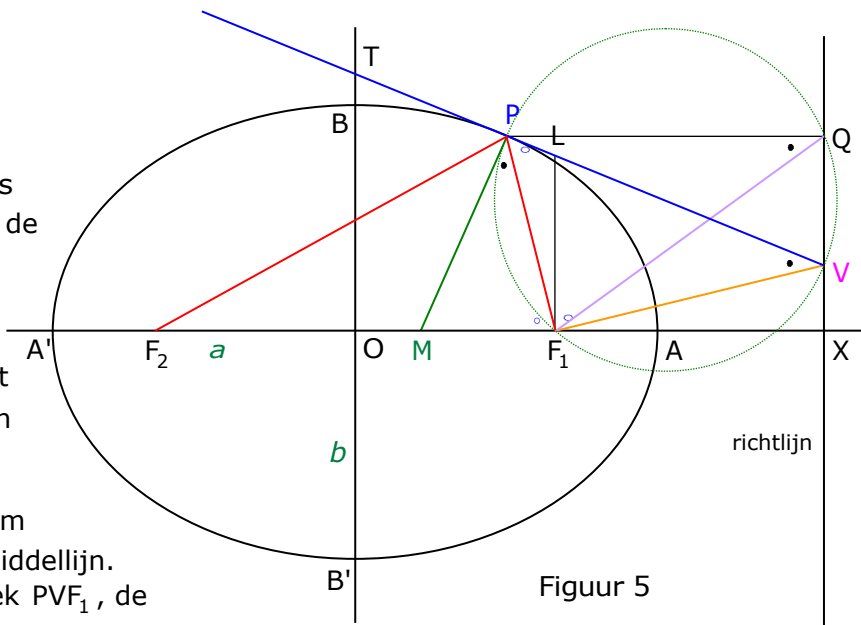
De conclusie is dus, dat  $\angle F_1PM = \alpha = \angle PVF_1 = \angle PQF_1$ , zodat de driehoek  $MF_1P$  gelijkvormig is met de driehoeken  $LF_1V$  en  $F_1PQ$ .

Dit laatste gecombineerd met de verhoudingsformule (46) levert het volgende op: 
$$\frac{F_1M}{F_1P} = \frac{F_1L}{F_1V} = \frac{PF_1}{PQ} = e = \frac{AF_1}{AX} \quad (47)$$

Op dezelfde wijze kan, met de richtlijn aan de linkerkant van de ellips, voor de focale radius  $F_2P$  worden afgeleid, dat  $\frac{F_2M}{F_2P} = e = \frac{AF_1}{AX}$ .

In de driehoek  $F_1PF_2$  geldt dus  $\frac{F_1M}{F_2M} = \frac{F_1P}{F_2P}$ , zodat  $PM$  bisectrice is van  $\angle F_1PF_2$ . Zie [Euclides, boek VI stelling 3](#) in appendix 1.

Hieruit volgt de optische eigenschap van de ellips, omdat  $\angle F_1PM = \angle F_2PM$ , terwijl  $\angle MPV = 90^\circ$ , zodat  $\angle F_1PV = \angle F_2PT$ .



Figuur 5

## 5. Eigenschappen van de focale radius en focale koorde

Op pagina 6 is eigenschap (28) van de raaklijn geformuleerd: de verbindingslijn van een brandpunt en het snijpunt van raaklijn en richtlijn maakt een hoek van  $90^\circ$  met de focale radius van het raakpunt. Op pagina 7 zijn hiervan twee bewijzen geleverd.

Een focale koorde is een lijnstuk, dat door het brandpunt gaat en begrensd wordt door de twee snijpunten met de ellips. In figuur 6 is het lijnstuk  $PP'$  daar een voorbeeld van. Aangezien de verbindingslijn  $F_1V$  loodrecht staat op de getekende koorde, snijden de raaklijnen in de punten  $P$  en  $P'$  elkaar in hetzelfde punt  $V$ .

Conclusie:

De richtlijn is de verzameling van snijpunten van paren raaklijnen, die de uiteinden van focale koorde als raakpunt hebben.

De verbindingslijn van het brandpunt met een snijpunt staat hierbij steeds loodrecht op de betreffende focale koorde. (48)

Zoals het laatste deel van de conclusie vermeldt, is  $\angle PF_1V = \angle P'F_1V = 90^\circ$ .

Anders gezegd: de verbindingslijn  $F_1V$  is de bisectrice van de hoek  $\angle PF_1P'$ .

Deze laatste eigenschap kan worden gegeneraliseerd:

De verbindingslijn van een brandpunt en het snijpunt van twee raaklijnen is de bisectrice van de hoek tussen de focale radii van de raakpunten. (49)

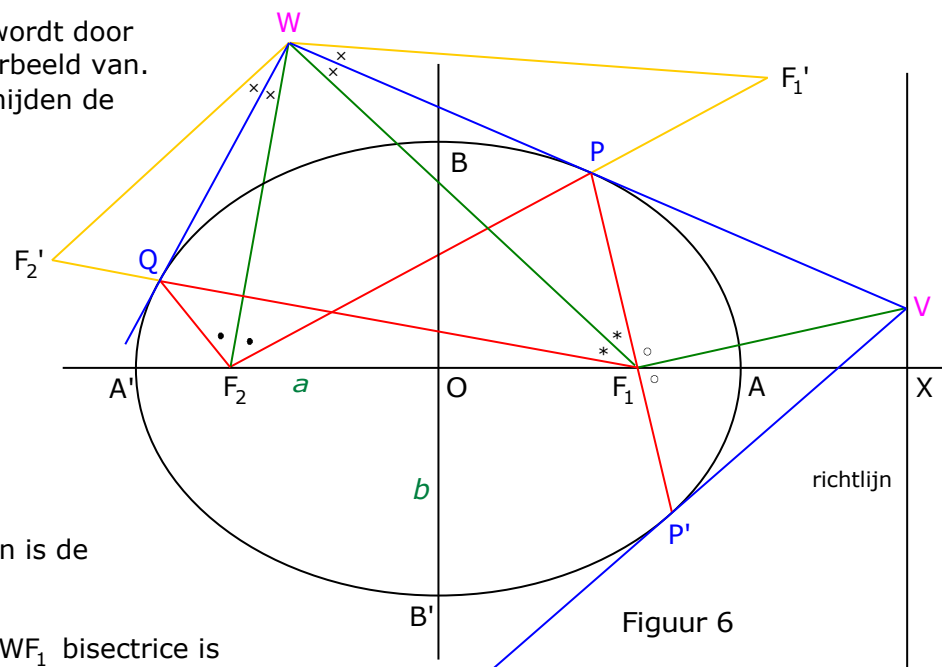
In figuur 6 is dit geïllustreerd met de raaklijnen  $WP$  en  $WQ$ , waarbij de lijn  $WF_1$  bisectrice is van  $\angle PF_1Q$  (zodat  $\angle WF_1P = \angle WF_1Q$ ) en de lijn  $WF_2$  bisectrice is van  $\angle PF_2Q$  (zodat  $\angle WF_2P = \angle WF_2Q$ ).

### Geometrisch bewijs

De focale radii  $PF_1$  resp.  $QF_2$  worden gespiegeld ten opzichte van de raaklijnen  $WP$  resp.  $WQ$ , zodat  $PF_1 = PF_1'$  en  $QF_2 = QF_2'$ .

De punten  $F_2$ ,  $P$  en  $F_1'$  liggen op één lijn vanwege de optische eigenschap van de raaklijn (zie pagina 8), zodat de denkbeeldige lijn  $F_1F_1'$  loodrecht op de raaklijn  $PV$  staat. Hetzelfde geldt voor de punten  $F_1$ ,  $Q$  en  $F_2'$  en de denkbeeldige lijn  $F_2F_2'$ .

De driehoeken  $WPF_1$  en  $WPF_1'$  zijn dus congruent, evenals de driehoeken  $WQF_2$  en  $WQF_2'$ .



Daarom zijn de volgende hoeken gelijk:  $\angle PWF_1 = \angle PWF_1'$  en  $\angle QWF_2 = \angle QWF_2'$

Nu geldt:  $F_2F_1' = F_2P + PF_1' = F_2P + PF_1 = 2a = F_1Q + QF_2 = F_1Q + QF_2' = F_2'F_1$  (50)

Dus de driehoeken  $WF_2F_1'$  en  $WF_2'F_1$  zijn congruent, omdat ze drie gelijke zijden hebben:  $F_2F_1' = F_2'F_1$ ,  $WF_2 = WF_2'$  en  $WF_1' = WF_1$ .

Daarom:  $\angle F_2WF_1 + 2\angle F_1WP = \angle F_2WF_1' = \angle F_2'WF_1 = \angle F_1WF_2 + 2\angle F_2WQ$  (51)

Maar omdat, zoals hierboven aangetoond, de driehoeken  $WPF_1$  en  $WPF_1'$  congruent zijn, is  $\angle WF_1F_2' = \angle WF_1'F_2$ .

Daarom geldt tenslotte:  $\angle WF_1'P = \angle WF_1'F_2 = \angle WF_1F_2' = \angle WF_1Q$  q.e.d. (52)

Evenzo geldt, omdat de driehoeken  $WQF_2$  en  $WQF_2'$  congruent zijn, dat  $\angle WF_2F_1' = \angle WF_2'F_1$ ,

zodat eveneens geldt:  $\angle WF_2'P = \angle WF_2'F_1 = \angle WF_2F_1' = \angle WF_2Q$  q.e.d. (53)

[ir. H. Karsmakers](#)

## Appendix 1

Stelling 3 van boek VI van [Euclides van Alexandrië](#) luidt:

Als een lijn (AD) bisectrice is van een hoek (A) van een driehoek (ABC), dan zal deze de overstaande zijde (BC) verdelen in lijnstukken (BD, DC), die evenredig zijn met de aanliggende zijden (AB, AC).

Omgekeerd, als de lijnstukken (BD, DC) waarin een lijn (AD), die getrokken is vanuit een willekeurige hoek van een driehoek (ABC), de overstaande zijde (BC) zodanig verdeelt, dat de gevormde lijnstukken (BD, DC) evenredig zijn met de aanliggende zijden (AB, AC), dan is die lijn een bisectrice van de hoek (A).

*Bewijs:*

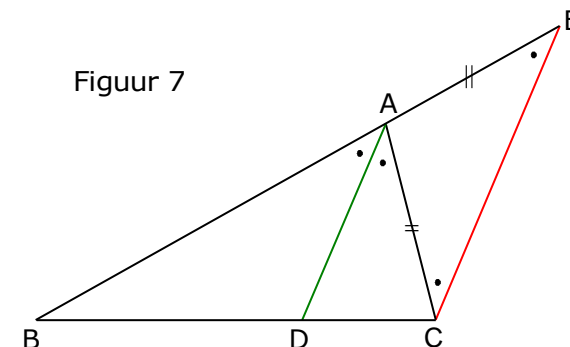
In figuur 7 is in driehoek ABC de bisectrice AD getrokken. Deze deelt  $\angle BAC$  doormidden.

Volgens de stelling moet dan gelden:  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Trek nu de lijn EC evenwijdig aan de bisectrice AD. Deze snijdt het verlengde van BA in E. Omdat BE wordt gesneden door de twee evenwijdige lijnen AD en EC is  $\angle BAD = \angle AEC$ . Ook de lijn AC wordt gesneden door dezelfde evenwijdige lijnen, zodat  $\angle DAC = \angle ACE$ .

In de driehoek CEA is  $\angle AEC = \angle ACE$ , zodat deze [gelijkbenig](#) is en  $AC = AE$ .

De driehoeken ABD en EBC hebben, behalve de genoemde gelijke hoek nog  $\angle ABC$  gemeenschappelijk en zijn daarom gelijkvormig. Daarom geldt:  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ . Echter  $AE = AC$ , dus  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$  q.e.d.



Figuur 7

*Omgekeerd:*

Omdat EC evenwijdig is aan AD, zijn de driehoeken ABD en EBC gelijkvormig, zodat de verhouding  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$  geldt.

Maar aannemende, volgens het tweede deel van de stelling, dat  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ , zal moeten gelden dat  $AC = AE$ .

Dan is driehoek CEA gelijkbenig, zodat  $\angle AEC = \angle ACE$ .

Omdat BE wordt gesneden door de twee evenwijdige lijnen AD en EC, is  $\angle BAD = \angle AEC$ .

De lijn AC wordt echter door dezelfde evenwijdige lijnen gesneden, zodat  $\angle DAC = \angle ACE$ .

Maar  $\angle AEC = \angle ACE$ , zodat  $\angle BAD = \angle DAC$ , waaruit volgt dat de lijn AD een bisectrice is. q.e.d.

## Appendix 2

Stelling A van boek VI van Euclides van Alexandrië (afgeleid van de vorige stelling op pag. 15) luidt:

Als een lijn (AD) bisectrice is van een buitenhoek (A) van een driehoek (ABC), zodat deze de overstaande verlengde zijde (BD) snijdt, dan zal deze zijde zodanig verdeeld worden, dat het verlengde deel van de zijde (CD) zich verhoudt tot de gehele overstaande zijde (BD) als de aanliggende zijden van de driehoek (AC, AB).

Omgekeerd, als een lijn, getrokken vanuit een buitenhoek (A) van een driehoek (ABC), de verlengde overstaande zijde zodanig verdeelt, dat het verlengde deel (CD) zich verhoudt tot de gehele overstaande zijde (BD) als de aanliggende zijden van de driehoek (AC, AB), dan is die lijn een bisectrice van de buitenhoek (A).

*Bewijs:*

In figuur 8 is in driehoek ABC de bisectrice AD van de buitenhoek A getrokken. Deze deelt de buitenhoek  $\angle FAC$  van driehoek ABC doormidden.

Volgens de stelling moet dan gelden:  $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$

Trek nu de lijn EC evenwijdig aan de bisectrice AD. Deze snijdt AB in E. AB wordt gesneden door twee evenwijdige lijnen AD en EC, dus  $\angle FAD = \angle AEC$ . Ook de lijn AC wordt gesneden door de evenwijdige lijnen, zodat  $\angle DAC = \angle ACE$ .

In de driehoek CEA is  $\angle AEC = \angle ACE$ , zodat deze gelijkbenig is en  $AC = AE$ .

De driehoeken ABD en EBC hebben, behalve de genoemde gelijke hoek,  $\angle ABC$  gemeenschappelijk en zijn daarom gelijkvormig.

Daarom geldt:  $\frac{CD}{BD} = \frac{AE}{AB}$  Echter  $AE = AC$ , dus  $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$  q.e.d. NB:  $\angle DAG = 90^\circ$  (AG is bisectrice van  $\angle BAC$ )!

*Omgekeerd:*

Omdat EC evenwijdig is aan AD, zijn de driehoeken ABD en EBC gelijkvormig, zodat de verhouding  $\frac{CD}{BD} = \frac{AE}{AB}$  geldt.

Maar aannemende, volgens het tweede deel van de stelling, dat  $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$ , zal moeten gelden dat  $AC = AE$ .

Dan is driehoek CEA gelijkbenig, zodat  $\angle AEC = \angle ACE$ .

Omdat AB wordt gesneden door de twee evenwijdige lijnen AD en EC, is  $\angle FAD = \angle AEC$ .

De lijn AC wordt echter door dezelfde evenwijdige lijnen gesneden, zodat  $\angle DAC = \angle ACE$ .

Maar  $\angle AEC = \angle ACE$ , zodat  $\angle FAD = \angle DAC$ , waaruit volgt dat de lijn AD een bisectrice is. q.e.d.

