Afbuiging van een lichtstraal onder invloed van de zwaartekracht van de zon

ir. H. Karsmakers

Inleiding

In juni 1911 publiceerde Albert Einstein in het wetenschappelijk tijdschrift Analen der Physik een artikel met de titel "Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes", waarin hij onder andere een berekening gaf van de mate waarin een lichtstraal, die langs de zon beweegt, wordt afgebogen door de zwaartekracht van de zon.

In 1915, toen Einstein zijn Algemene Relativiteitstheorie formuleerde, realiseerde hij zich, dat zijn resultaat voor de afbuiging van licht in de publicatie van 1911 niet correct was, maar een factor 2 kleiner was dan de werkelijke afbuiging.

Bij observaties van de zonsverduistering van 29 mei 1919 werd de (uiterst geringe) afbuiging van sterlicht in de buurt van de zonnerand nauwkeurig gemeten door Arthur Eddington en bleek deze, binnen de vigerende foutenmarge, te voldoen aan de Einstein's voorspelling. Dit vormde het begin van de grote internationale bekendheid van Einstein en volledige acceptatie van zijn relativiteitstheorie.

In analogie met de uitgangspunten en bevindingen van Einstein in zijn artikel van 1911, zullen we hier een berekening geven van de baan die sterlicht volgt, wanneer het wordt afgebogen in het zwaartekrachtsveld van de zon. Daarbij wordt aangenomen, dat het alleen de zwaartekracht van de zon is, die invloed uitoefent op het langs de zonnerand scherende sterlicht. De kromming van de ruimte rondom de zon, die wordt beschreven door de Algemene Relativiteitstheorie, wordt hier buiten beschouwing gelaten. Zoals reeds vermeld, leidt dit tot een fout van een factor 2 in de mate van afbuiging van het sterlicht.

Men zal zich afvragen, hoe is het mogelijk is dat licht wordt afgebogen door de zon en in het algemeen door zware massa's, zoals sterren. Licht is immers massaloos en Newton's zwaartekrachtstheorie is daarop dan toch niet van toepassing?
Volgens de gravitatiewet van Isaac Newton geldt:

$$F = G\frac{M\,m}{r^2} \tag{1}$$

Hierbij is F de aantrekkingskracht (eenheid $\mathrm{N = kg\,m\,s^{-2}}$) tussen twee voorwerpen met massa M resp. m (eenheid kg), die op een afstand r (eenheid m) van elkaar verwijderd zijn.

De gravitatieconstante G (ook de constante van Cavendish genoemd) is de kracht waarmee twee massa's van $1\ \mathrm{kg}$ elkaar aantrekken, die zich op een afstand van $1\ \mathrm{m}$ van elkaar bevinden. Volgens de IAU geldt:

$$G = 6{,}673\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}\ (\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}) \tag{2}$$

Newton's gravitatiewet geldt voor massa's, maar kennelijk niet voor licht, dat wel energie, maar geen massa bezit.

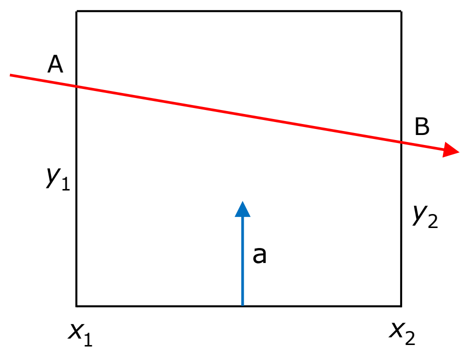
Om de afbuiging te verklaren maakte Einstein gebruik van het equivalentieprincipe.
In zijn boekje Über die spezielle und die algemeine Relativätstheorie (gemeinverständlich) uit 1916, bedoeld voor leken met een middelbare-schoolniveau, legt Einstein zelf uit wat hij verstaat onder dit principe. Hij dacht zich hierbij een waarnemer die staat in een grote kist (bijv. ter afmeting van een kamer), die zich eenparig versneld beweegt door een gravitatieloze ruimte (zie figuur 1).

De kist krijgt deze versnelling, doordat deze met constante kracht verticaal omhoog wordt getrokken (door een of ander niet nader genoemd wezen). De versnelling van de kist a $(\mathrm{m\,s^{-2}})$ zorgt ervoor, dat de waarnemer met massa m (kg) een kracht F (N) ondervindt, die in grootte gelijk is aan $F = ma$. De richting van deze kracht is tegengesteld aan de bewegingsrichting van de kist, waardoor de waarnemer met zijn voeten tegen de bodem van de kist wordt gedrukt.

Als de versnelling van de kist bijvoorbeeld gelijk is aan g, de versnelling van de zwaartekracht op aarde, zal de waarnemer de neerwaartse kracht (zijn gewicht) op dezelfde manier ervaren als wanneer hij zich op het aardoppervlak bevindt. Het verschil is echter, dat in de kist zijn gewicht wordt veroorzaakt door de traagheid van zijn lichaam ten gevolge van het versneld voortbewegen van de kist, terwijl op aarde zijn gewicht wordt veroorzaakt door de aantrekkingskracht tussen hem en de aarde.
Met andere woorden: trage massa en zware massa zijn identiek.
Volgens Einstein behoren de natuurwetten in beide gevallen hetzelfde te zijn en kan de waarnemer, zolang hij niet naar buiten kan kijken, niet weten, of hij zich in een versnelde kist bevindt, danwel dat de kist op aarde staat en onderhevig is aan aardse zwaartekracht.

Stel nu, dat via een gaatje in de linker zijwand van de kist een lichtstraal horizontaal naar binnen valt bij punt $\mathrm{A}(x_1, y_1)$. Omdat de lichtsnelheid zeer groot is ($c = 2{,}988.10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$), zal de kist met de waarnemer, tijdens de uiterst korte tijd Δt dat de lichtstraal zich door de versnelde kist voortplant, een klein beetje naar boven bewegen.
De horizontale lichtstraal zal dus voor de waarnemer in de kist naar beneden zijn afgebogen en de rechter wand op een lager punt $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ treffen, zodat $y_2 < y_1$.
Omdat de snelheid van de kist in deze korte tijd enigszins zal zijn toegenomen, zal de door de lichtstraal afgelegde baan bovendien een klein beetje gekromd zijn.

Figuur 1



Natuurlijk zal de mate van afbuiging $\Delta y = y_2 - y_1$ erg klein zijn en bepaald worden door de verhouding van de snelheid van de kist en de lichtsnelheid. Nog meer geldt dit voor mate van kromming van de lichtstraal, die wordt bepaald door de verandering van de snelheid gedurende de passage van het licht. Duidelijkheidshalve is de mate van afbuiging in de figuur overdreven groot voorgesteld en de kromming niet weergegeven.

Het zwaartekrachtsveld van de zon

Volgens de gravitatiewet van Newton, weergegeven in formule (1), is de aantrekkingskracht F, die een voorwerp met massa m ondervindt van de zon (met massa M), afhankelijk van de afstand r van dat voorwerp tot de zon. Deze kracht, die gericht is volgens de verbindingslijn zon – voorwerp, is er de oorzaak van, dat het voorwerp een versnelling a ondervindt. Ook de zon ondervindt een aantrekkingskracht van het voorwerp. Deze is even groot, maar de richting ervan is tegengesteld aan die van het voorwerp.

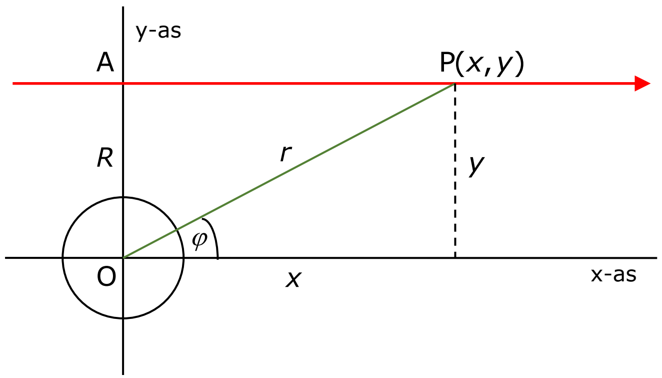
De versnelling van de zwaartekracht a van het voorwerp is als volgt te berekenen:

$$F = G\frac{M\,m}{r^2} = m\,a \qquad \rightarrow \qquad a = G\frac{M}{r^2} \tag{3}$$

In een assenstelsel met een horizontale x-as en verticale y-as laten we een voorwerp een horizontale beweging uitvoeren (evenwijdig aan de x-as van links naar rechts). Het centrum van de zon valt samen met de oorsprong O van dit assenstelsel (zie figuur 2).
De z-as, die loodrecht staat op beide genoemde assen (en het vlak van tekening) is hier weggelaten.

Bij beschouwing van het voorwerp in een willekeurige positie $\mathrm{P}(x,y)$ kan de versnelling a, die het ondervindt ten gevolge van de aantrekkingskracht F, worden ontbonden in een horizontale component a_x en een verticale component a_y:

Figuur 2



$$F_x = m\,a_x \qquad \text{met} \qquad a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -a\cos\varphi = -a\frac{x}{r} = -GM\frac{x}{r^3} \tag{4}$$

$$F_y = m\,a_y \qquad \text{met} \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -a\sin\varphi = -a\frac{y}{r} = -GM\frac{y}{r^3} \tag{5}$$

Hierbij geldt steeds: $$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

Het minteken duidt aan, dat beide krachten en versnellingen naar links, respectievelijk naar beneden zijn gericht.

Alleen de benedenwaartse versnellingscomponent a_y zal aanleiding kunnen geven tot afbuiging van de baan van het voorwerp. De mate van afbuiging zal het sterkste zijn, als het voorwerp in zijn baan de kleinste afstand heeft tot de zon. Dit is het geval in het punt $\mathrm{A}(0,R)$, waar de afstand van het voorwerp tot de zon gelijk is aan $r = \mathrm{AO} = R$.

Beschrijving van de afbuiging

Om de afbuiging van het sterlicht door de zon te beschrijven, zal gemakshalve worden uitgegaan van een lichtstraal, die volgens een stilstaand coördinatenstelsel met x - en y -as een horizontale baan beschrijft, zoals op pagina 3 is beschreven. De lichtstraal bewaart hierbij steeds een constante afstand R tot de x -as. Dit is precies wat kan worden verwacht, als de zon geen invloed zou uitoefenen op de gang van de lichtstraal. De snelheid van het licht is, gedurende haar traject door de ruimte, gelijk aan de (constante) lichtsnelheid c .

De lichtstraal wordt waargenomen in een bewegend gravitatieloos coördinatenstelsel, dat zich eenparig versneld in de positieve y -richting beweegt, op dezelfde wijze zoals op pagina 2 is beschreven. Het gaat nu echter niet om een constante versnelling (zoals bijvoorbeeld op het aardoppervlak), maar om een veranderende versnelling. Deze is in grootte gelijk aan de versnelling die een voorwerp ondervindt, dat dezelfde baan zou volgen als de lichtstraal. Op het teken na wordt deze gegeven door formule (5): $a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = GM\frac{y}{r^3}$

Volgens het equivalentieprincipe zal de baan van de lichtstraal, zoals die door een waarnemer in het bewegende coördinatenstelsel wordt gezien, dezelfde moeten zijn als de baan van een lichtstraal die, tijdens zijn baan door de ruimte, de zon op minimale afstand R passeert.

In figuur 3 is een klein stukje van het traject van de lichtstraal getoond, dat wordt voorgesteld door de afstand AB met infinitesimale lengte ds .
Deze afstand legt de lichtstraal met de lichtsnelheid af in de tijdsfractie dt .
Hierbij is de (uiterst kleine) afbuiging dy overdreven groot voorgesteld.

Uit de figuur volgt direct: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$

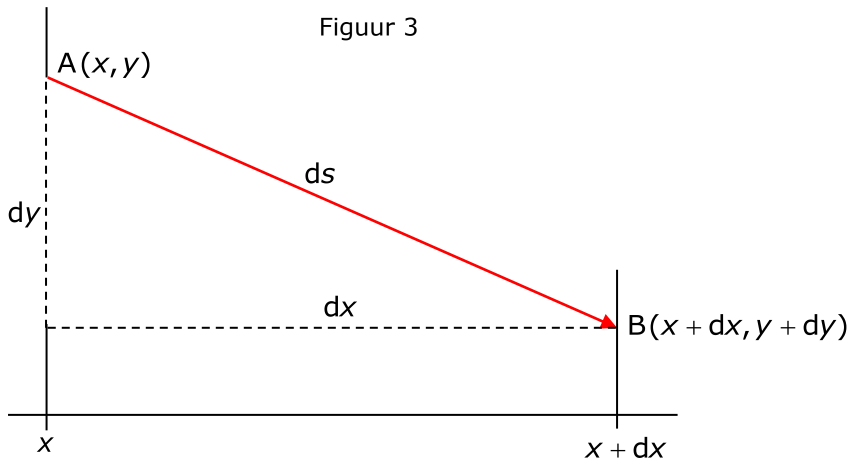
De afstand ds wordt met de lichtsnelheid c afgelegd in tijd dt , dus:

$$ds = c\,dt \qquad (7)$$

Omdat de afbuiging uiterst klein is, zal de helling $\frac{dy}{dx}$ van het lijnstuk AB verwaarloosbaar klein zijn (ten opzichte van 1), zodat bij benadering geldt:

$$dx \cong ds \qquad \text{en} \qquad \frac{dx}{dt} \cong \frac{ds}{dt} = c \qquad (8)$$

Figuur 3



Hieruit volgt voor de snelheid in de y -richting: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = c\frac{dy}{dx}$ (9)

Voor de versnelling in de y -richting geldt dan: $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}) = \frac{d}{dt}(c\frac{dy}{dx}) = c\frac{d^2y}{dt\,dx} = c\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt}) = c\frac{d}{dx}(c\frac{dy}{dx}) = c^2\frac{d^2y}{dx^2}$ (10)

Oplossing van de differentiaalvergelijking

De oorzaak van de versnelling van de lichtstraal, zoals waargenomen in het bewegende coördinatenstelsel, is uiteraard de versnelling van dit coördinatenstelsel zelf. Zoals besproken op de vorige pagina's, is deze gelijk aan de versnelling, die een voorwerp ondervindt in het (veranderende) zwaartekrachtsveld van de zon. De richting ervan is tegengesteld aan die van het bewegende coördinatenstelsel, dus de versnelling van de lichtstraal heeft een negatief teken.

Door combinatie van de formules (5), (6) en (10) is de differentiaalvergelijking op te stellen, waaruit de baan van het sterlicht volgt:

$$c^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -GM\frac{y}{r^3} = -GM\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{GM}{c^2}\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{11}$$

De uiterst kleine afbuiging, die het sterlicht ondergaat, impliceert dat de y-waarde van de baan zeer weinig zal afwijken van R, de kortste afstand, waarmee het licht de zon passeert. Het is dus gerechtvaardigd te stellen dat $y \cong R$.

De differentiaalvergelijking gaat dan over in de eenvoudiger vorm: $$\frac{d^2y}{dx^2} \cong -\frac{GM}{c^2}\frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}} \tag{12}$$

Integreren van de vergelijking (12) geeft dan voor de eerste afgeleide:

$$\frac{dy}{dx} = \int -\frac{GM}{c^2}\frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}dx = -\frac{GMR}{c^2}\int\frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = -\frac{GMR}{c^2}\frac{1}{R^2}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} + C_1 = -\frac{GM}{Rc^2}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} \tag{13}$$

Bij horizontale passage van de zon in punt $A(0,R)$ geldt $\frac{dy}{dx} = 0$ bij $x = 0$, zodat voor de integratieconstante geldt: $C_1 = 0$

In de appendix op pagina 8 is de afleiding van de integraal $\int\frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$ opgenomen.

Integratie van vergelijking (13) geeft voorts:

$$y = \int -\frac{GM}{Rc^2}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}dx = -\frac{1}{2}\frac{GM}{Rc^2}\int\frac{d(x^2+R^2)}{(x^2+R^2)^{1/2}} = -\frac{GM}{Rc^2}(x^2+R^2)^{1/2} + C_2$$

Het punt A(0, R) levert de randvoorwaarde $y = R$ bij $x = 0$, zodat voor de integratieconstante volgt: $C_2 = R + \frac{GM}{c^2}$

De vergelijking van het pad van de lichtstraal is dus: $$y = -\frac{GM}{Rc^2}(x^2+R^2)^{1/2} + R + \frac{GM}{c^2} = R + \frac{GM}{c^2}\left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{R^2}+1}\right) \tag{14}$$

Conclusies uit de baanvergelijking en de formule voor de afbuiging

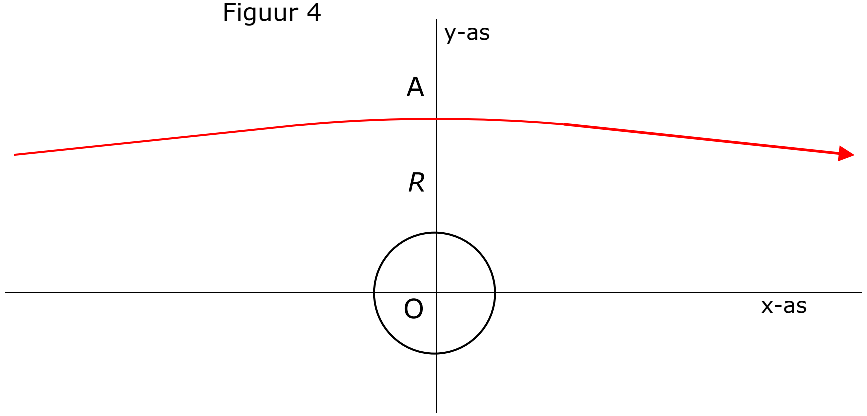
De vergelijking van de baan van het sterlicht luidt volgens (14): $y = R + \frac{GM}{c^2}(1 - \sqrt{\frac{x^2}{R^2} + 1})$

Dit is de vergelijking van de onderste tak van een hyperbool met de top $y = R$ bij $x = 0$. Zie ook de onderstaande figuur 4.

Door de vergelijking te schrijven als $y = R + \frac{GM}{c^2}(1 \pm \frac{x}{R}\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}})$ blijkt, dat de factor $\frac{R^2}{x^2}$ bij grote waarden van x nadert naar 0 ,

zodat de y-waarde ongeveer gelijk wordt aan: $y = R + \frac{GM}{c^2}(1 \pm \frac{x}{R})$

Figuur 4



De linker tak van de baan nadert bij zeer grote negatieve x-waarden dus naar een rechte met vergelijking: $y = R + \frac{GM}{c^2} + \frac{GM}{Rc^2}x$ (15)

Bij grote positieve x-waarden benadert de rechter tak van de baan de rechte met vergelijking: $y = R + \frac{GM}{c^2} - \frac{GM}{Rc^2}x$ (16)

Bij $x = 0$ snijden deze rechten bij $y = R + \frac{GM}{c^2}$ (17)

De richtingscoëfficiënten van beide lijnen komen overeen met de waarden van $\frac{dy}{dx}$ bij vergelijking (13).

Immers: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{dy}{dx} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{GM}{Rc^2}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{GM}{Rc^2}\frac{1}{(1+\frac{R^2}{x^2})^{1/2}} = +\frac{GM}{Rc^2} \quad (18)$$

en $$\lim_{x\to+\infty}\frac{dy}{dx} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{GM}{Rc^2}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{GM}{Rc^2}\frac{-1}{(1+\frac{R^2}{x^2})^{1/2}} = -\frac{GM}{Rc^2} \quad (19)$$

De totale afbuiging van het sterlicht α is gelijk aan het verschil van de 2 richtingscoëfficiënten, dus $\alpha = \frac{2GM}{Rc^2}$ (20)

Zoals vermeld op pagina 1, is deze deflectie een factor 2 kleiner dan de werkelijke waarde.

Berekening van de afbuiging van het sterlicht door de zon

Op pagina 6 is afgeleid, dat de afbuiging van het sterlicht α wordt gegeven door formule (20): $\alpha = \dfrac{2GM}{Rc^2}$

De grootte van α zal nu worden berekend voor de zon met behulp van de volgende gegevens:

gravitatieconstante:	$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
massa van de zon:	$M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$
straal van de zon:	$R = 6{,}957 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m}$
lichtsnelheid in vacuüm:	$c = 2{,}998 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

Uit de gekozen waarde van R blijkt, dat de afbuiging geldt voor sterlicht, dat langs de rand van de zon scheert.

Invullen van de formule geeft de uitkomst in radialen:

$$\alpha = \frac{2GM}{Rc^2} = \frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{6{,}957 \cdot 10^{8} \cdot (2{,}998 \cdot 10^{8})^2} = 4{,}25 \cdot 10^{-6} \qquad (21)$$

Omgerekend in boogseconden is de uitkomst:

$$\alpha = 4{,}25 \cdot 10^{-6}\,(\mathrm{rad}) \cdot \frac{180}{\pi}(\mathrm{booggraden} \cdot \mathrm{rad}^{-1}) \cdot 3600\,(\mathrm{boogseconden} \cdot \mathrm{booggraden}^{-1}) = 0{,}876\ \mathrm{boogseconden} \qquad (22)$$

Appendix

Bij de oplossing van de differentiaalvergelijking op pagina 5 komt volgende onbepaalde integraal voor:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Deze integraal kan door goniometrische substitutie als volgt worden opgelost:

Stel: $\quad x = R\tan\theta \qquad (23)$

dan volgt: $\quad \mathrm{d}x = \dfrac{R\,\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} \qquad (24)$

en $\quad x^2+R^2 = R^2\tan^2\theta + R^2 = R^2(\tan^2\theta+1) = R^2(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1) = R^2(\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}) = \dfrac{R^2}{\cos^2\theta} \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{x^2+R^2} = \dfrac{\cos^2\theta}{R^2}$

De noemer van de integrand kan dus als volgt worden geschreven:

$$\frac{1}{(x^2+R^2)^{3/2}} = (\frac{\cos^2\theta}{R^2})^{3/2} = \frac{\cos^3\theta}{R^3} \qquad (25)$$

Door combinatie van (24) en (25) kan de integraal worden omgezet in goniometrische vorm en vervolgens opgelost:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \int \frac{R\,\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos^3\theta}{R^3} = \frac{1}{R^2}\int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{R^2}\sin\theta + C \qquad (26)$$

De factor $\sin\theta$ kan door toepassing van (23) worden 'terugvertaald' in de onbekende x :

$$\sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta} = \frac{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1} = \frac{\dfrac{x^2}{R^2}}{\dfrac{x^2}{R^2}+1} = \frac{x^2}{x^2+R^2} \quad \rightarrow \quad \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{x^2}{x^2+R^2}} = \frac{\pm x}{(x^2+R^2)^{1/2}} \qquad (27)$$

Conclusie: $\quad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2}\sin\theta + C = \frac{1}{R^2}\cdot\frac{\pm x}{(x^2+R^2)^{1/2}} + C \qquad (28)$